國立虎尾科技大學
105-1 管院期中會考解答

(一)選擇題:

1. 求 $f(x) = -\frac{1}{x}$ 在點 $(3, -\frac{1}{3})$ 的切線斜率。

   解:

   $\because f'(x) = x^{-2} \quad \therefore m = f'(3) = \frac{1}{9}$

2. 令 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 12x + 9$,請問 f 圖形上何處有水平切線。

   解:

   $\because$ 水平切線斜率為 0
   $\therefore\ f'(x) = 2x^2 + 2x - 12 = 2(x^2 + x - 6) = 2(x+3)(x-2) = 0$
   得 $x = -3, x = 2$

3. 已知 f 和 g 為在 $x = 1$ 可微分的函數,且$f(1) = 2$、$f'(1) = -1$、$g(1) = -2$ 及 $g'(1) = 3$。設 $h(x) = \frac{f(x)g(x)}{f(x) - g(x)}$ 求 $h'(1)$ 的值。

   解:

   $$h'(1) = \frac{[f'(1)g(1) + f(1)g'(1)][f(1) - g(1)] - [f'(1) - g'(1)][f(1)g(1)]}{[f(1) - g(1)]^2} = 1$$

4. 下列敘述何者正確?

   解:

   函數在 $x = a$ 可微,則在 $x = a$ 連續

5. 對於函數 $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2 + x - 2}$ 其定義域為何?

   解:

   $\because$ 分母 $(x^2 + x - 2) = (x+2)(x-1) \neq 0\ \therefore\ x \neq -2, x \neq 1 \cdots\cdots(1)$
   且 $2 - x \geq 0 \Longrightarrow x \leq 2 \cdots\cdots(2)$
   所以由 (1)(2) 結果得 $f(x)$ 的定義域為 $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, 2]$

6. 函數 $f(x) = 2\sqrt{x} + 3, g(x) = x^2 + 1$ 下列何者為合成函數 gof ?

   解:

   $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2\sqrt{x} + 3) = (2\sqrt{x} + 3)^2 + 1 = 4x + 12\sqrt{x} + 10$

7. 函數 $f(x)=\dfrac{6x}{x^2-9}$, $g(x)=\sqrt{3x}$, 則合成函數 fog 之定義域為何 ?

解:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{3x})=\frac{6(\sqrt{3x})}{(\sqrt{3x})^2-9}=\frac{6\sqrt{3x}}{3x-9}$$

$\because$ 分母 $3x-9\neq 0$ $\therefore$ $x\neq 3\cdots\cdots(1)$

且 $3x\geq 0\Longrightarrow x\geq 0\cdots\cdots(2)$

所以由 (1)(2) 結果得 $f(x)$ 的定義域為 $[0,3)\cup(3,\infty)$

8. 函數 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-4}+cx$, 求可讓點 $(5,3)$ 落在 $f(x)$ 圖形上之 c 為何?

解:

$$f(5)=\frac{\sqrt{5-1}}{5-4}+5c=3\Longrightarrow\frac{\sqrt{4}}{1}+5c=3\Longrightarrow 5c=3-2\Longrightarrow c=\frac{1}{5}$$

9. 若 $f(x)=\begin{cases}|x|, & 若 x\neq 0;\\ 1, & 若 x=0\end{cases}$ $(a=0)$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=?$

解:

$\because\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}|x|=0$ (右極限) , $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}|x|=0$ (左極限)

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ (左極限 $=$ 右極限)

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+1}{x^3-1}=?$

解:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+1}{x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}=-\infty\ \left(\because\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0\right)$$

11. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+4}{x-2}=?$

解:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x+4}{x-2}=\frac{2+4}{0}=-\infty\ \left(\because x\to 2^-\right)$$

12. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$ 求可使函數 $f(x)$ 不連續的 x 值。

解:

$\because$ 分母 $x^2-1=0\Longrightarrow x^2=1\Longrightarrow x=\pm 1$

$\therefore f(x)$ 在 $x=\pm 1$ 無意義 , 故在 $x=\pm 1$ 不連續

13. 假設 $h = fog$, 且已知 $f(1) = 3, f'(1) = 0, f'(4) = 7, g(1) = 4, g'(1) = -2$, 求 $h'(1) =$

解:

$\because\ h = fog = [f(g(x))] \Longrightarrow h'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$\therefore\ h'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(4) \cdot (-2) = 7 \cdot (-2) = -14$

14. 求 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 1}}$ 的導函數。

解:

$$f'(x) = \frac{[(1)' \cdot \sqrt{2x^2-1}] - [1 \cdot (\sqrt{2x^2-1})']}{(\sqrt{2x^2-1})^2} = \frac{\frac{-4x}{2\sqrt{2x^2-1}}}{(2x^2-1)} = \frac{-2x}{\sqrt{(2x^2-1)^3}}$$

15. 若 $g(t) = (2t+3)^2(1-3t^2)^{-3}$, 求 $\left.\dfrac{dg}{dt}\right|_{t=0} = ?$

解:

$$g'(t) = 2(2t+3) \cdot 2(1-3t^2)^{-3} + (2t+3)^2(-3)(1-3t^2)^{-4}(-6t) \Longrightarrow g'(0) = 12$$

16. 若 $(x+y^2)^{10} = x^2 + 25$, 求 $\dfrac{dy}{dx} = ?$

解:

依隱函數微分法

$$\Longrightarrow 10(x+y^2)^9 \cdot (1 + 2y \cdot y') = 2x \Longrightarrow (1 + 2y \cdot y') = \frac{2x}{10(x+y^2)^9}$$
$$\Longrightarrow 2y \cdot y' = \frac{10(x+y^2)^9 - 2x}{10(x+y^2)^9} \Longrightarrow y' = \frac{x - 5(x+y^2)^9}{10y(x+y^2)^9}$$

(二)計算題:

1. 請用導數之極限定義,求函數 $y = f(x) = \sqrt{3x}$ 在 $x = 3$ 之導數,並求函數在 $x = 3$ 之切線方程式。

解:

依定義 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3(3+h)} - \sqrt{3 \cdot 3}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{3(3+h)} - \sqrt{3 \cdot 3})(\sqrt{3(3+h)} + \sqrt{3 \cdot 3})}{h(\sqrt{3(3+h)} + \sqrt{3 \cdot 3})} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h(\sqrt{3(3+h)} + \sqrt{3 \cdot 3})} = \lim_{h \to 0} \frac{3}{(\sqrt{3(3)} + \sqrt{3 \cdot 3})} \lim_{h \to 0} \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 3}} = \frac{1}{2} = m \end{aligned}$$

$\therefore$ 在 $x = 3$ 的切線方程式為 $\dfrac{y-3}{x-3} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

2. 求 $x^2 + \dfrac{4}{y} = y\sqrt{x} + 1$ 在 $x = 1$ 的切線方程式。

解:

$$2x + 4(-1)y^{-2}y' = y'\sqrt{x} + y \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow (\sqrt{x} + 4y^{-2})y' = 2x - \frac{1}{2}yx^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow y' = \frac{2x - \frac{1}{2}yx^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x} + 4y^{-2}}$$

且當 $x = 1 \Longrightarrow 1 + \dfrac{4}{y} = y \cdot 1 + 1 \Longrightarrow y^2 = 4 \Longrightarrow y = \pm 2$

因此 , $m\Big|_{(1,2)} = \dfrac{2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1} + 4 \cdot 2^{-2}} = \dfrac{2-1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$m\Big|_{(1,-2)} = \dfrac{2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot -2 \cdot 1^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1} + 4 \cdot -2^{-2}} = \dfrac{2+1}{1+1} = \dfrac{3}{2}$

故在 $(1, 2)$ 的切線方程式為 $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x-1) \Longrightarrow y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

在 $(1, -2)$ 的切線方程式為 $y + 2 = \dfrac{3}{2}(x-1) \Longrightarrow y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{2}$