國立虎尾科技大學
105-1 管院期末會考解答

(一)填充題:

1. 對於函數 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$,其凹性區間為何?
   解:

   $D_f($ 定義域 $)=R=(-\infty,\infty)$

   $f'(x)=\dfrac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ 當 $f'(x)=0\Longrightarrow 1-x^2=0\Longrightarrow x=\pm1,\ \therefore$ 臨界點為 $x=\pm1$

   $f''(x)=\dfrac{-2x(1+x^2)^2-2(1+x^2)2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=\dfrac{-2x(1+x^2)-4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

   當 $f''(x)=0\Longrightarrow 2x(x^2-3)=0\Longrightarrow x=0,x=\pm\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y凹性	向下		向上		向下		向上

   由上表可知 $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$ 凹向下 , $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},\infty)$ 凹向上

2. 關於函數 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$,下列敘述何者正確?
   解:

   $D_f($ 定義域 $)=\{x|x\neq0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

   $f'(x)=2x-2x^{-2}$ 當 $f'(x)=0\Longrightarrow 2x-2x^{-2}=0\Longrightarrow 2x(1-x^{-3})=0$

   $\Longrightarrow x=1,x=0($ 不合 $),\ \therefore$ 臨界點為 $x=1$

   $f''(x)=2+4x^{-3}$ 當 $f''(x)=0\Longrightarrow 2+4x^{-3}=0\Longrightarrow 2x^3+4=0\Longrightarrow x^3=-2$

   $\Longrightarrow x=\sqrt[3]{-2}$, 二階導數為零或不存在的點為 $x=0,\sqrt[3]{-2}$

x		$\sqrt[3]{-2}$		0		1	
y'	$-$	$-$	$-$	不存在	$-$	0	$+$
y增減	遞減		遞減		遞減		遞增
y''	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	上	反曲點	下	不存在	上	3	上

   由上表可知 ,反曲點在 $x=\sqrt[3]{-2}$, 函數有相對極小值在 $x=1$

   函數在 $(-\infty,\sqrt[3]{-2})\cup(0,\infty)$ 凹向上 , $(\sqrt[3]{-2},0)$ 凹向下

3. 對數 $\ln\dfrac{e^x}{\sqrt{x}(1+2e^x)}$,下列何化簡正確?
   解:

   $$\ln\frac{e^x}{\sqrt{x}(1+2e^x)}=\ln e^x-\ln\sqrt{x}(1+2e^x)=x-[\ln x^{\frac{1}{2}}+\ln(1+2e^x)]=x-\frac{1}{2}\ln x-\ln(1+2e^x)$$

4. 方程式 $\ln(x-1)+\ln 4=\ln(2x+4)-\ln 2$ 之解為何?
解:

$$\ln(x-1)+\ln 4=\ln(2x+4)-\ln 2 \Longrightarrow \ln 4(x-1)=\ln\frac{(2x+4)}{2} \Longrightarrow 4(x-1)=\frac{(2x+4)}{2}$$
$$\Longrightarrow 4x-4=x+2 \Longrightarrow 3x=6 \Longrightarrow x=2$$

5. 用隱函數微分對 $\ln(x^2y)-y^2=7$, 求 $\frac{dy}{dx}=$
解:

$$\frac{d}{dx}[\ln(x^2y)-y^2]=\frac{d}{dx}[7] \Longrightarrow \frac{2xy+x^2y'}{x^2y}-2yy'=0 \Longrightarrow 2xy+x^2y'-2x^2y^2y'=0$$
$$\Longrightarrow (x^2-2x^2y^2)y'=-2xy \Longrightarrow y'=\frac{-2xy}{x^2-2x^2y^2}=\frac{-2y}{x(1-2y^2)}$$

另解 : $\ln(x^2y)-y^2=7 \Longrightarrow \ln x^2+\ln y-y^2=7 \Longrightarrow \frac{d}{dx}[\ln x^2+\ln y-y^2]=\frac{d}{dx}[7]$
$$\Longrightarrow \frac{2}{x}+\frac{y'}{y}-2yy'=0 \Longrightarrow 2y+xy'-2xy^2y'=0 \Longrightarrow x(1-2y^2)y'=-2y \Longrightarrow y'=\frac{-2y}{x(1-2x^2)}$$

6. 用對數式微分法求 $y=x^{\ln x}$, $x>0$ 的導函數
解:

$$y=x^{\ln x} \Longrightarrow \ln y=\ln x^{\ln x} \Longrightarrow \ln y=\ln x\ln x \Longrightarrow \frac{y'}{y}=\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln x}{x}$$
$$\Longrightarrow y'=2y\frac{\ln x}{x}=2x^{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}=2(\ln x)x^{\ln x-1}$$

7. 若不定積分 $F(x)=\int(xe^{-x^2}+\frac{e^x}{e^x+3})dx$, 且 $F(0)=2\ln 2-\frac{1}{2}$, 則 $F(1)=$
解:

$$F(x)=\int(xe^{-x^2}+\frac{e^x}{e^x+3})dx=\int xe^{-x^2}dx+\int\frac{e^x}{e^x+3}dx$$

令 $u=-x^2, v=e^x+3 \Longrightarrow du=-2xdx, dv=e^xdx$
$$\Longrightarrow \int xe^u\cdot\frac{du}{-2x}+\int\frac{e^x}{v}\cdot\frac{dv}{e^x}=\frac{-1}{2}\int e^u du+\int\frac{1}{v}dv=\frac{-1}{2}e^u+\ln|v|+c$$
$$=\frac{-1}{2}e^{-2x}+\ln(e^x+3)+c$$
$$F(0)=\frac{-1}{2}e^{-0^2}+\ln(e^0+3)+c=2\ln 2-\frac{1}{2} \Longrightarrow c=0 \Longrightarrow F(1)=\ln(e+3)-\frac{e^{-1}}{2}$$

8. 若不定積分 $F(x) = \int \frac{1}{x(\ln x)} dx$, 且 $F(e) = 2$, 則 $F(2) =$
解:

令 $u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x} dx$
$\Longrightarrow \int \frac{1}{xu} \cdot x du = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$
$F(e) = \ln(\ln e) + c = 2 \Longrightarrow 0 + c = 2 \Longrightarrow c = 2 \Longrightarrow F(2) = \ln(\ln 2) + 2$

9. 若對區間 (a, b) 中的任意點 x 均有 $f'(x) < 0$ 則 f 在 (a, b) 為
解:

對區間 (a, b) 中的任意點 x 均有 $f'(x) < 0$ 則 f 在 (a, b) 為遞減

10. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 下列何者錯誤?
解:

D_f(定義域) $= \{x | x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$f'(x) = 1 - x^{-2}$ 當 $f'(x) = 0 \Longrightarrow 1 - x^{-2} = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$, $\therefore$ 臨界點為 $x = \pm 1$

x		-1		0		1	
y'	$+$	0	$-$	不存在	$-$	0	$+$
y增減	遞增		遞減		遞減		遞增

由上表可知 $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ 為遞增區間 , 且 $(-1, 0) \cup (0, 1)$ 為遞減區間
$\therefore$ 相對極小值為 $f(1) = 2$, 相對極大值為 $f(-1) = -2$

11. 解出 $e^{2x} + 5e^x - 14 = 0$ 的 x 值
解:

令 $a = e^x \Longrightarrow a^2 + 5a - 14 = 0 \Longrightarrow (a+7)(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 2, a = -7$(不合, $\because e^x > 0$, $\forall x \in R$)
$\Longrightarrow e^x = 2 \Longrightarrow \ln e^x = \ln 2 \Longrightarrow x = \ln 2$

12. 設 $f(x) = Axe^{-kx}$, 若 $f(1) = 5$ 及 $f(2) = 7$, 則下列何者正確?
解:

$f(1) = Ae^{-k} = 5$, $f(2) = 2Ae^{-2k} = 7$
$\Longrightarrow 2e^{-k} f(1) = f(2) \Longrightarrow 10e^{-k} = 7 \Longrightarrow e^{-k} = \frac{7}{10} \Longrightarrow e^k = \frac{10}{7}$

13. 求 $f(\omega) = \frac{e^\omega + 2}{e^\omega}$ 的導函數
解:

$\because \frac{e^\omega + 2}{e^\omega} = 1 + 2e^{-\omega} \Longrightarrow \frac{d}{d\omega}(1 + 2e^{-\omega}) = -2e^{-\omega}$

14. 求 $f(x)=2xe^{3x}$ 的二階導函數
解:

$$f'(x)=2(e^{3x}+e^{3x}\cdot 3x)=2e^{3x}+6xe^{3x}$$
$$f''(x)=2\cdot e^{3x}\cdot 3+6(e^{3x}+e^{3x}\cdot 3x)=6e^{3x}+6e^{3x}+18xe^{3x}=6e^{3x}(2+3x)$$

15. 求不定積分 $\int \frac{2}{x^3}dx=$
解:

$$\int \frac{2}{x^3}dx=\int 2x^{-3}dx=\frac{2}{(-3+1)}x^{(-3+1)}+c=-x^{-2}+c=-\frac{1}{x^2}+c$$

16. 求不定積分 $\int(2t+1)(t-2)dt=$
解:

$$\int(2t+1)(t-2)dt=\int(2t^2-3t-2)dt=\frac{2}{(2+1)}t^{(2+1)}-\frac{3}{(1+1)}t^{(1+1)}-2t+c$$
$$=\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2-2t+c$$

(二)計算題:

1. 求 $\int xe^{2x^2+1}dx$
解:

令 $u=2x^2+1 \Longrightarrow du=4xdx$
$\therefore$ 則 $\int xe^u\cdot\frac{du}{4x}=\frac{1}{4}\int e^u du=\frac{1}{4}e^u+c=\frac{1}{4}e^{2x^2+1}+c$

2. 求函數 $f(x)=xe^x$ 的相對極值, 反曲點
解:

D_f(定義域) $=R=(-\infty,\infty)$
$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$ 當 $f'(x)=0 \Longrightarrow x+1=0$ $(\because e^x>0,\forall x\in R)$
$\Longrightarrow x=-1$, $\therefore$ 臨界點為 $x=-1$
$f''(x)=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x=e^x(2+x)$ 當 $f''(x)=0$
$\Longrightarrow (2+x)=0$ $(\because e^x>0,\forall x\in R) \Longrightarrow x=-2$ (可能是反曲點)

x		-2		-1	
y'	$-$	$-e^{-2}$	$-$	0	$+$
y增減	遞減		遞減		遞增
y''	$-$	0	$+$	e^{-1}	$+$
y凹性	向下	$-2e^{-2}$	向上	$-e^{-1}$	向上

由上表可知, 相對極小值為 $f(-1)=-e^{-1}$, 反曲點為 $(-2,f(-2))=(-2,-2e^{-2})$