國立虎尾科技大學
106-1 管院期中會考解答

(一)填充題:

1. 求極限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4x^2+4}-2\sqrt{2}}{x-1}$ 之值為?
   解:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x^2+4}-2\sqrt{2}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{4x^2+4}-2\sqrt{2})\cdot(\sqrt{4x^2+4}+2\sqrt{2})}{(x-1)\cdot(\sqrt{4x^2+4}+2\sqrt{2})}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+4-8}{(x-1)\cdot(\sqrt{4x^2+4}+2\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{4(x^2-1)}{(x-1)\cdot(\sqrt{4x^2+4}+2\sqrt{2})}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x+1)(x-1)}{(x-1)\cdot(\sqrt{4x^2+4}+2\sqrt{2})}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x+1)}{(\sqrt{4x^2+4}+2\sqrt{2})}$$
$$=\frac{4(1+1)}{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=\frac{8}{4\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

2. 下列哪一個函數在 $x=1$ 連續?
   解:

(A) $\because\ f(1)=\dfrac{1+1}{1-1-2}=\dfrac{2}{-2}=-1$

且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2-x-2}=\dfrac{1+1}{1-1-2}=\dfrac{2}{-2}=-1=f(1)$

故 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x-2}$ 在 $x=1$ 連續

(B) $\because\ f(1)=2+1=3$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(4x+1)=5$

$\lim\limits_{x\to 1^-}(4x+1)=5$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1}f(x)=5\neq f(1)=3$

(C) $\because f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$　　$\therefore f(1)=\dfrac{1-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}$(不存在)

(D) $\because f(x)=\dfrac{2}{x-1}$　　$\therefore f(1)=\dfrac{2}{1-1}=\dfrac{2}{0}$(不存在)

3. 下列何者正確?
   解:

(A) 在 $x=2$ 時, $f(2)=4$, 但 $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$ 不一定等於 4

(B) $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$ 不一定等於 3

(C) f 在 $x=0$ 時, $f(0)=0$, 但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不一定等於 0, 所以 f 在 $x=0$ 時, 不一定連續。

4. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4-x^2}{2x^2+x^3} & ,x<-2 \\ kx^2+3x-1 & ,x\geq -2 \end{cases}$ 請問 k 為何值時，$f(x)$ 在 (-∞,∞) 間連續。

解:

$$\because f(-2)=k(-2)^2+3(-2)-1=4k-6-1=4k-7$$

$$且 \lim_{x\to -2^-}\frac{4-x^2}{2x^2+x^3}=\lim_{x\to -2^-}\frac{(2+x)(2-x)}{x^2(2+x)}=\lim_{x\to -2^-}\frac{2-x}{x^2}=\frac{4}{4}=1$$

$$\lim_{x\to -2^+}(kx^2+3x-1)=4k-6-1=4k-7$$

$$\therefore \lim_{x\to -2}f(x)=f(-2) \implies 4k-7=1 \implies 4k=8 \implies k=2$$

5. 對於函數之可微性與關係，下列何者正確?(下列選項所述切線，涵蓋水平及鉛直切線)

解:

(C) $f(x)$ 在 $x=a$ 可微，則在 $x=a$ 連續；但在 $x=a$ 連續，在 $x=a$ 處不一定可微。

6. $f(x)=\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}+1$，則 $f'(x)=$?

解:

$$f(x)=3x^{-3}+4x^{-\frac{1}{2}}+1 \implies f'(x)=-9x^{-4}-2x^{-\frac{3}{2}}$$

7. $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5+(x^2+1)(x^2-x-1)+28$，則 $f'(x)=$?

解:

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{5}\cdot 5x^4+2x(x^2-x-1)+(x^2+1)(2x-1) \\ &=x^4+2x^3-2x^2-2x+2x^3-x^2+2x-1 \\ &=x^4+4x^3-3x^2-1 \end{aligned}$$

8. 函數 $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-2}$，求在點 (2,3) 之切線方程式為何?

解:

$$\because f'(x)=\frac{3(x^2-2)-3x\cdot 2x}{(x^2-2)^2}=\frac{3x^2-6-6x^2}{(x^2-2)^2}=\frac{-3x^2-6}{(x^2-2)^2}$$

$$\therefore m(斜率)=f'(2)=\frac{-12-6}{4}=-\frac{18}{4}=-\frac{9}{2}$$

故方程式為：$y-3=-\dfrac{9}{2}(x-2) \implies y-3=-\dfrac{9}{2}x+9 \implies y=-\dfrac{9}{2}x+12$

9. 下列何者敘述是不正確的?

解:

(D) $\because\ 1-x\geq 0$ 且 $x^2-4\neq 0$

$\Rightarrow\quad x\leq 1\quad$ 且 $x^2\neq 4$

$\Rightarrow\quad x\leq 1\quad$ 且 $x\neq \pm 2$

故定義域為 $(-\infty,-2)\cup(-2,1]$

10. 函數 $f(x)=\sqrt{x}+1$, $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$, 下列何者為合成函數 $g\circ f$?

解:

$$g(f(x))=g(\sqrt{x}+1)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$$

11. 函數$f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, $g(x)=\sqrt{x}$, 則合成函數 $f\circ g$ 之定義域為何?

解:

$f(g(x))=f(\sqrt{x})=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

$\because\ x\geq 0$ 且 $x-1\neq 0$

$\Rightarrow x\geq 0$ 且 $x\neq 1$

故定義域為 $[0,1)\cup(1,\infty)$

12. 假設 $h(x)=f(x^3)$, 且已知 $f'(2)=4$, $f'(8)=3$, 求 $h'(2)=$

解:

依Chain Rule (連鎖律)

$\Rightarrow h'(x)=f'(x^3)\cdot 3x^2$

$\Rightarrow h'(2)=f'(x^3)\cdot 3x^2\Big|_{x=2}=f'(8)\cdot 12=3\cdot 12=36$

13. 設 $y=\dfrac{1}{u^2}$, 且$u=\sqrt{2x}+1$, 求 $\dfrac{dy}{dx}=$

解:

$\because\ \dfrac{dy}{du}=-2u^{-3}$

且 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2=(2x)^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

$$=-2u^{-3}\cdot(2x)^{-\frac{1}{2}}=-2u^{-3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=-2(\sqrt{2x}+1)^{-3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{-2}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x}+1)^3}$$

14. 設 $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2x^2+x}}$, 求 $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=1}=$

解:

$$f'(x)=\frac{0-3\cdot\frac{1}{3}\cdot(2x^2+x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(4x+1)}{(\sqrt[3]{2x^2+x})^2}=\frac{-(4x+1)}{(2x^2+x)^{\frac{4}{3}}}$$

$$f'(1)=\left.\frac{-(4x+1)}{(2x^2+x)^{\frac{4}{3}}}\right|_{x=1}=\frac{-5}{(\sqrt[3]{3})^4}=\frac{-5}{3\sqrt[3]{3}}$$

15. 若 $g(x)=\sqrt{x}(x^2-1)^3$, 求 $g'(x)=?$

解:

$$g'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2-1)^3+x^{\frac{1}{2}}\cdot 3(x^2-1)^2\cdot 2x=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2-1)^3+6x^{\frac{3}{2}}(x^2-1)^2$$

$$=\frac{(x^2-1)^3+12x^2(x^2-1)^2}{2\sqrt{x}}=\frac{(x^2-1)^2(x^2-1+12x^2)}{2\sqrt{x}}=\frac{(x^2-1)^2(13x^2-1)}{2\sqrt{x}}$$

16. 若 $\sqrt{xy}=2x+y^2$, 求 $\dfrac{dy}{dx}=$

解:

$$\because\ \sqrt{xy}=2x+y^2 \implies y^2+2x-\sqrt{xy}=0$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}[y^2+2x-(xy)^{\frac{1}{2}}]=0$$

$$\implies 2y\cdot\frac{dy}{dx}+2-\frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}\cdot(y+x\cdot\frac{dy}{dx})=0 \implies 2y\cdot\frac{dy}{dx}+2-\frac{y}{2\sqrt{xy}}-\frac{x}{2\sqrt{xy}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\implies (2y-\frac{x}{2\sqrt{xy}})\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2\sqrt{xy}}-2 \implies \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{2\sqrt{xy}}-2}{2y-\frac{x}{2\sqrt{xy}}}=\frac{y-4\sqrt{xy}}{4y\sqrt{xy}-x}=\frac{4\sqrt{xy}-y}{x-4y\sqrt{xy}}$$

(二)計算題:

1. (a) 請寫出導函數 $f'(x)$ 的極限定義。(b) 請利用此定義求 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$ 的導函數$f'(x)$。

解:

(a) $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(b) $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x^2+xh}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x^2+xh}=\frac{-1}{x^2}=-x^{-2}\ ,\ x\neq 0$$

2. 設 $(x+xy-1)^2 = 4x$, 利用隱函數方法 , (1) 求 $\dfrac{dy}{dx}$ =? (2) 求在點 $x = 1$ 的切線斜率。

解:

(1) $\because \dfrac{d}{dx}[(x+xy-1)^2] = \dfrac{d}{dx}(4x)$

$\Rightarrow 2(x+xy-1)\cdot(1+y+x\cdot\dfrac{dy}{dx}) = 4$

$\Rightarrow 1+y+x\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x+xy-1}$

$\Rightarrow x\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x+xy-1} - 1 - y$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2-x-xy+1-xy-xy^2+y}{x+xy-1}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{3-x+y-2xy-xy^2}{x(x+xy-1)}$

(2) 當 $x = 1$ 代入原式,得 $(1+y-1)^2 = 4 \implies y^2 = 4 \implies y = \pm 2$

當 $(x,y) = (1,2) \implies m = \dfrac{3-x+y-2xy-xy^2}{x(x+xy-1)}\Big|_{(1,2)} = \dfrac{3-1+2-4-4}{1\cdot(1+2-1)} = \dfrac{-4}{2} = -2$

當 $(x,y) = (1,-2) \implies m = \dfrac{3-x+y-2xy-xy^2}{x(x+xy-1)}\Big|_{(1,-2)} = \dfrac{3-1-2+4-4}{1\cdot(1-2-1)} = \dfrac{0}{-2} = 0$