虎尾科技大學

第十四屆數理科學研習營

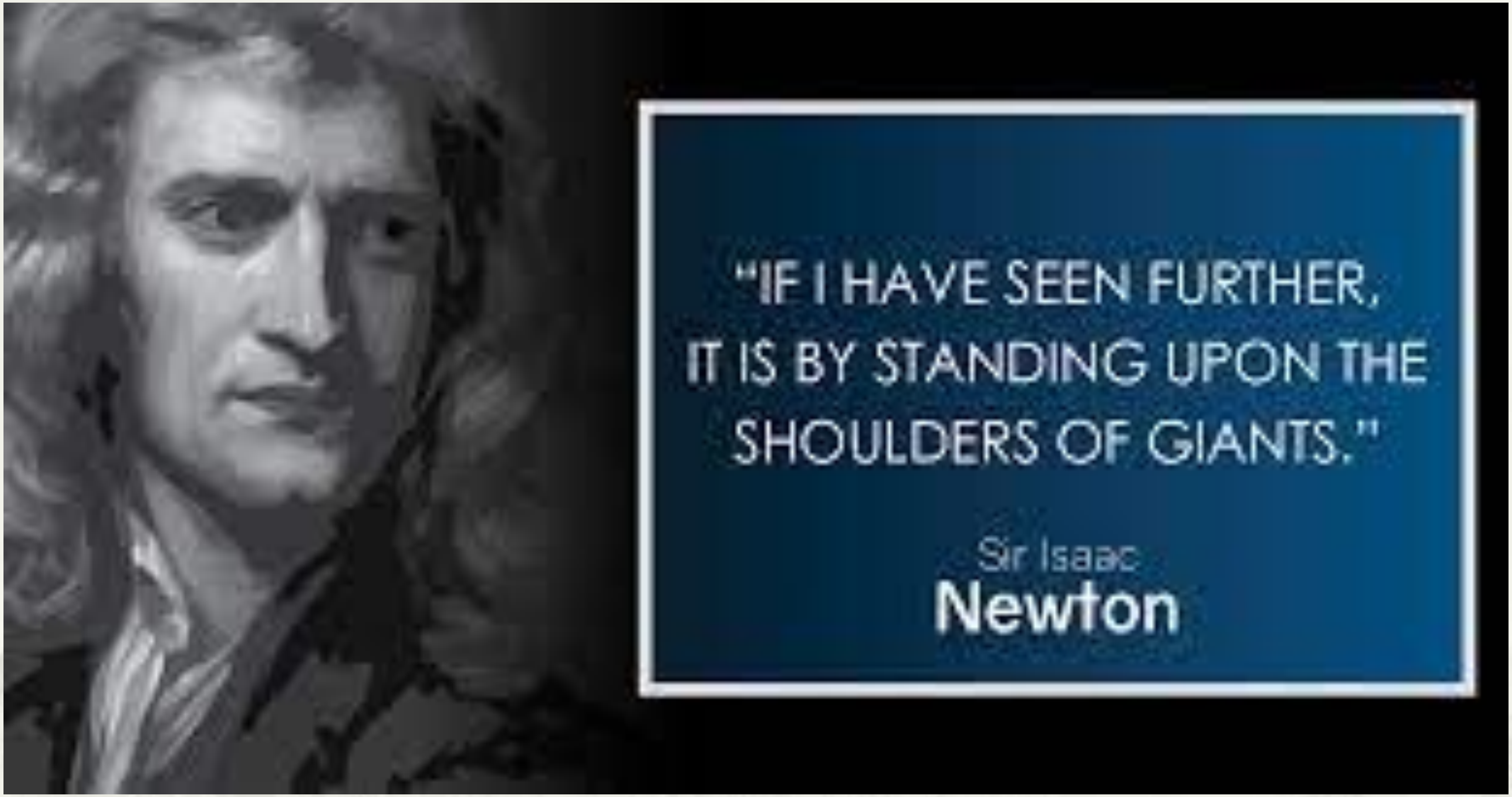
微積分漫步:由歸納法、不等式到量綱分析

李信儀

2023/11/17

The apple tree that inspired Newton's theory of gravity still stands to this day, 350 years later, at his family's estate, Woolsthorpe Manor.

Source : Blowingfacts.org @blowingfacts365


"IF I HAVE SEEN FURTHER,
IT IS BY STANDING UPON THE
SHOULDERS OF GIANTS."
Sir Isaac
Newton

微分的世界～積分的世界

熊的顏色？

問題：

有一頭熊，從高度 20 公尺地方墜落至地面，歷時 2 秒。

試問熊的顏色?

熊的顏色？

問題：有一頭熊，從高度 20 公尺地方墜落至地面，歷時 2 秒。試問熊的顏色?

答：

(1) 距離公式 $s = (at^2)/2$, 其中 a 為加速度。
(2) 地球的地表重力加速度 g 並非是常數。隨著緯度越高，g 就越大。

根據 (1) 可知： $20 = (a\,2^2)/2$ 可算出 $a = 10.$

根據 (2), 地球上重力加速度最有可能接近 10 的只有南北兩極 (因為緯度最大，事實上南北極的重力加速度 9.832 左右). 因此，可以猜測出只有南極或北極的熊。

由於南極沒有熊，不然就沒企鵝了。因此，就只剩下北極熊。故熊的顏色為白色。

可微(導)必連續

四主題

A. 數學歸納法 (Mathematical Induction)

B. 著名不等式 (Famous Inequalities)

C. 量綱 (因次) 分析 (Dimensional Analysis)

D. 未解的數學問題 (Open Problems)

數學歸納法

數學歸納法第一原理

Step 1. 確認 $n = 1$ 時，敘述 $P(1)$ 成立。

Step 2. 假設 n = k 時，敘述 $P(k)$ 成立。
若我們能證明：當 $n = k+1$ 時，敘述 $P(k)$ 也成立，
則該敘述 $P(n)$ 對於所有大於等於 1 之整數皆成立。

NOTE.

1. 多米諾效應 (Domino’s effect)

2. 其他形式：數學歸納法第二原理、分段歸納法、反向歸納法等。

數學歸納法

已知

$$1 = 1 = 1^2$$
$$1+3 = 4 = 2^2$$
$$1+3+5 = 9 = 3^2$$
$$1+3+5+9 = 16 = 4^2$$

一個合理的猜測: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$

我們用數學歸納法來證明我們的猜測。

證明:

Step 1. 當 $n = 1$ 時, $1 = 1^2$ 顯然成立。

Step 2. 假設當 $n = k$ 成立，即 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2.$

則當 n = k + 1 時， 根據歸納法假設，我們也有

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

故根據數學歸納法，我們證明了此公式。

NOTE. 另解

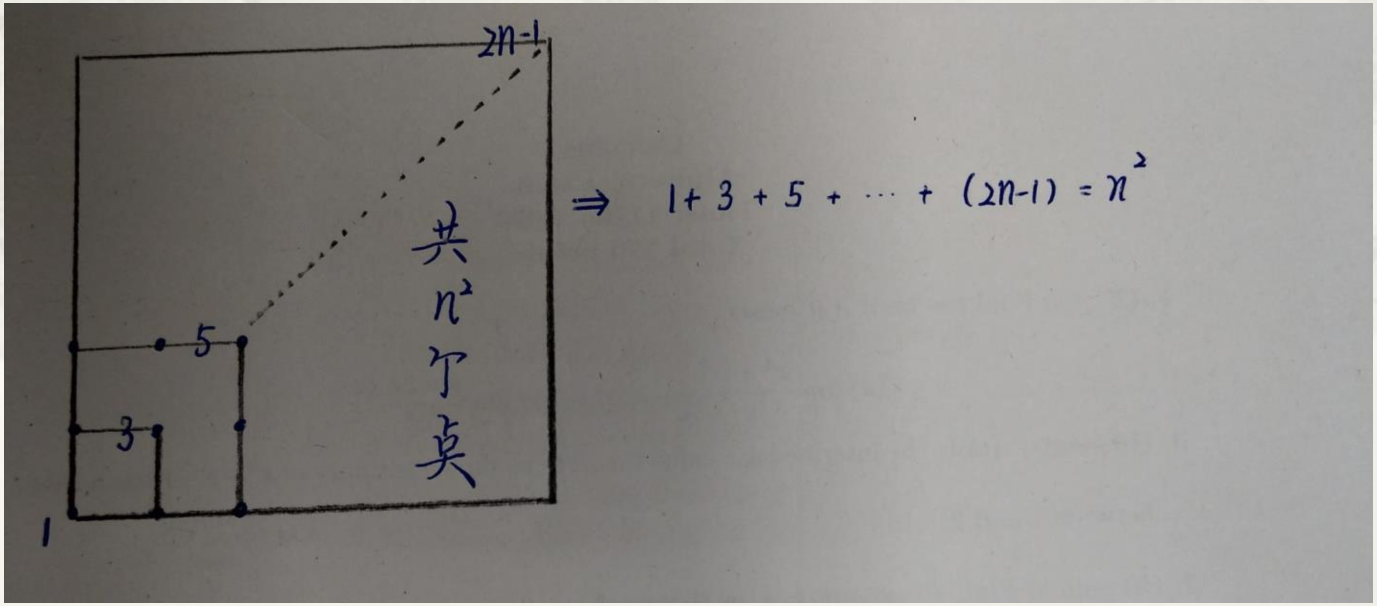
數學歸納法

已知

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2 \\ 1+3 &= 4 = 2^2 \\ 1+3+5 &= 9 = 3^2 \\ 1+3+5+9 &= 16 = 4^2 \end{aligned}$$

一個合理的猜測: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

圖解法



數學歸納法之誤用

A. 起始點不能省（骨牌第一片）

如果我們省略了 Step 1, 我們會得到錯誤的結果。例如:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 + r$$

Step 2. 假設當 $n = k$ 成立，即

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2 + r.$$

則當 n = k + 1 時， 根據歸納法假設，我們也有

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + r + 2k + 1 = (k+1)^2 + r.$$

這明顯不對！

數學歸納法之誤用

B. 飯永遠吃不飽

Step 1. 當 $n = 1$ (吃了 1 粒飯) ，顯然吃不飽。
Step 2. 假設 $n = k$ (吃了 k 粒飯) 吃不飽。
則當 $n = k + 1$ (再多吃 1 粒飯) 也一定吃不飽。

因此，根據數學歸納法，飯永遠吃不飽。

問：錯在哪！？

數學歸納法之誤用

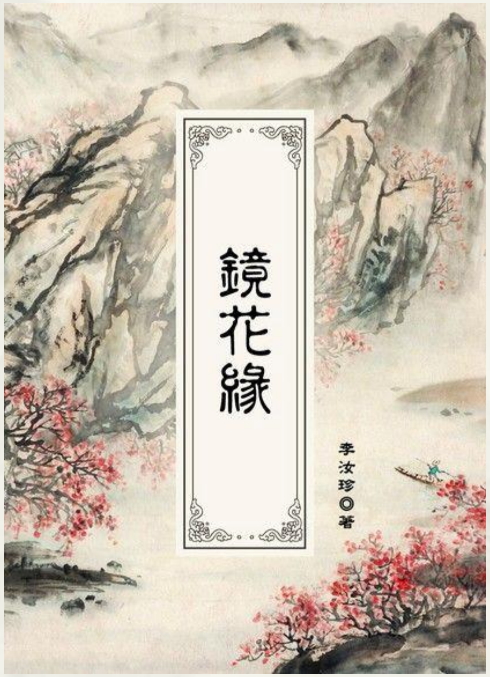
錯誤的地方有兩個：

(1) 飽，不是一個明確的數學定義 (所以，多吃一粒飯就很難說得清楚到底飽還是不飽)

(2) 著名小說李汝珍－鏡花緣：

第九回 **服肉芝延年益壽，食朱草入聖超凡**

有提到一粒飯就能飽的故事。



NOTE. 數學上有許多趣味性的**悖論**。例如：

1. 龜兔賽跑：兔子永遠跑不贏烏龜
2. 射箭：箭永遠射不出去
3. 同心圓：大圓的圓周 = 小圓的圓周

數學歸納法之例子

例 1.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

方法:

(1) 數學歸納法

(2) 據傳數學王子高斯 (Gauss) 在小學時，
被老師要求計算從 1 加到 100 之總和。

(3) 圖解法(視覺化)

數學歸納法之例子

例 1.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

數學歸納法

Step 1. 當 $n = 1$, 左式 $= 1 =$ 右式 $= \frac{1 \cdot 2}{2}$, 顯然成立。

Step 2. 假設 $n = p$ 成立，即 $\sum_{k=1}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}$.

則當 $n = p+1$ 時，根據歸納法假設，我們有

$$\sum_{k=1}^{p+1} k = \left(\sum_{k=1}^{p} k\right) + (p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + (\mathrm{p}+1) = \frac{(\mathrm{p}+2)(\mathrm{p}+1)}{2}.$$

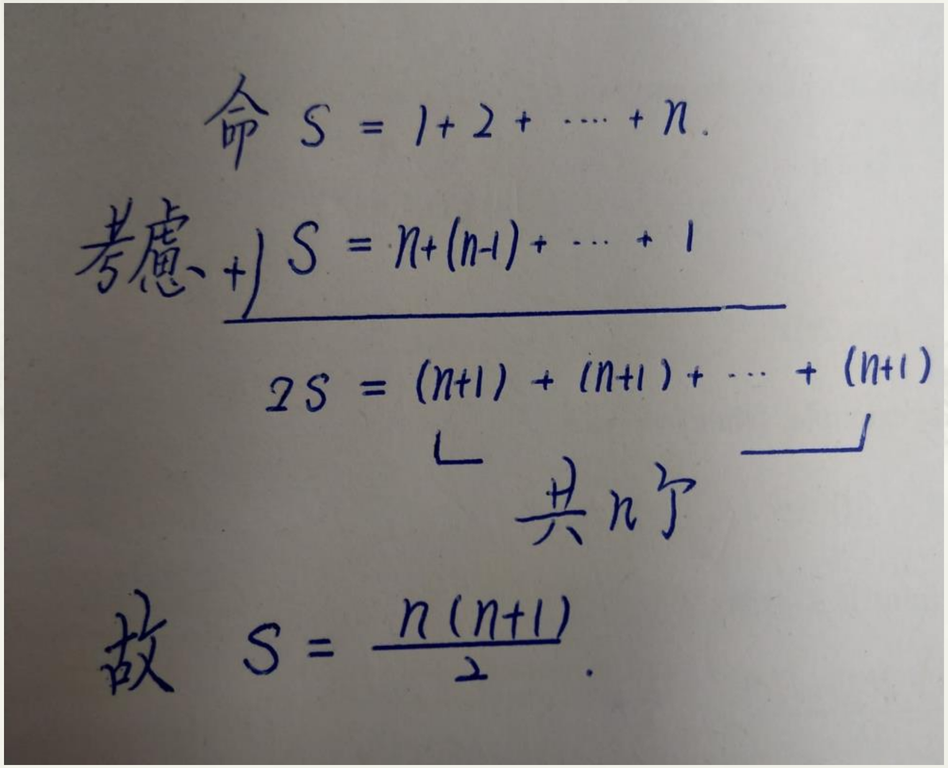
故根據數學歸納法，我們證明此公式。

數學歸納法之例子

例 1.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

據傳**數學王子高斯 (Gauss)** 在小學時，被老師要求計算從 1 加到 100 之總和。

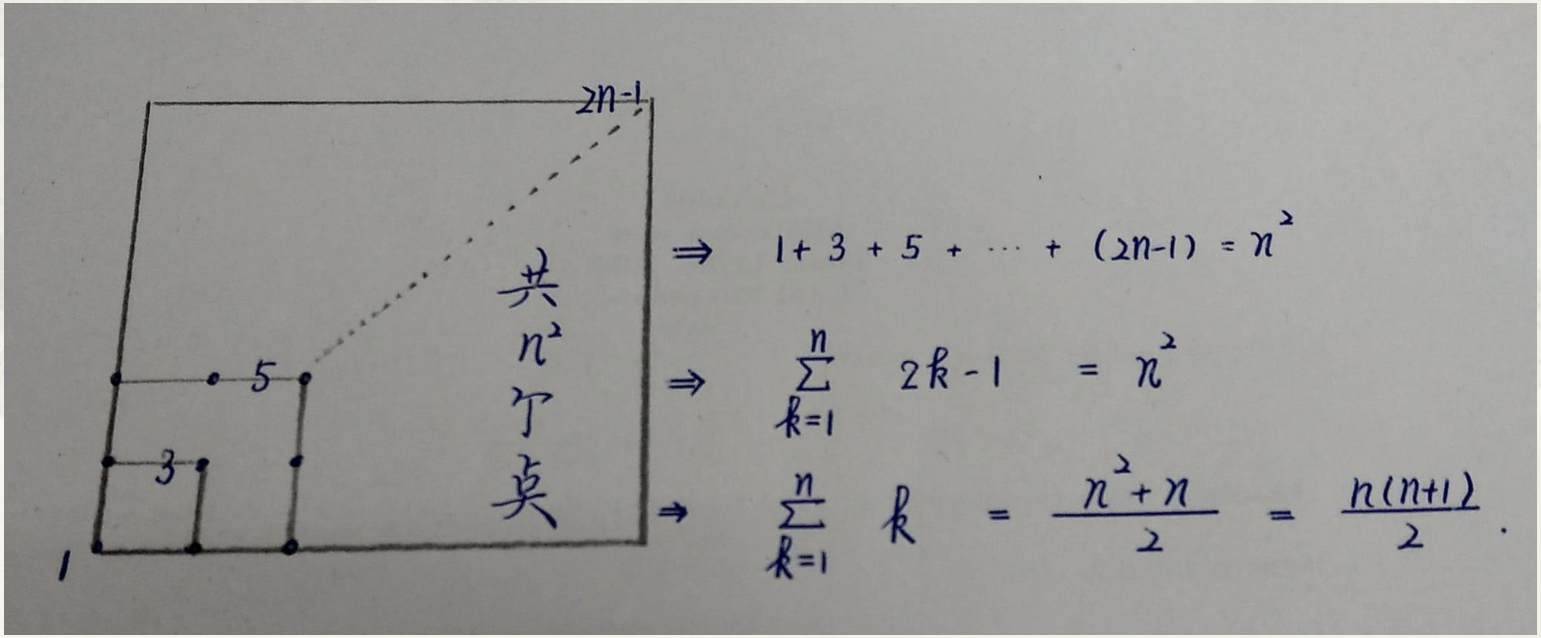


數學歸納法之例子

例 1.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

圖解法(視覺化)



數學歸納法之例子(黎曼積分會用到)

例 2. 命 p 為正整數，

如何推導下列

求和公式?

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = ?$$

數學歸納法之例子(黎曼積分會用到)

例 2. 命 p 為正整數，則如何推導下列求和公式?

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p} = ?$$

方法:

(1) 業餘數學家之王**費馬 (Fermat)** 透過他驚人的敏銳力，將他發現的結果寄給給**巴斯卡 (Pascal).**

(2) $(1+x)^{\mathrm{p}+1} = \cdots$ (二項式定理)

NOTE.

關於這種求和公式，推導的方法非常多。例如：我們也可以利用 Bernoulli numbers 來推導出此公式，而此種方法涉及到微積分學中的冪級數理論。此外，我們還可以用差分學求出此公式出來 …

數學歸納法之例子(黎曼積分會用到)

例 2. 命 p 為正整數，

如何推導下列求和公式?

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p} = ?$$

方法:

業餘數學家之王

費馬(Fermat) 透過他驚人的敏銳力，將他發現的結果寄給**巴斯卡 (Pascal).**

已知 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

費馬發現下列公式皆成立 (可用數学歸納法證之)

(1) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

故 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + \sum_{k=1}^{n} 2k$

故 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k$

透過計算 $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

(3) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

故可知 $\sum_{k=1}^{n} k^4$ 之公式

$\vdots$

其餘依此類推.

數學歸納法之例子(黎曼積分會用到)

例 2. 命 p 為正整數，

如何推導下列求和公式?

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p} = ?$$

二項式定理的方法:

$(1+x)^{p+1} = \cdots$ (二項式定理)

已知 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 及 $(1+x)^{3} = x^{3} + 3x^{2} + 3x + 1$,

故 $\cancel{2^{3}} = (1+1)^{3} = 1^{3} + 3\cdot 1^{2} + 3\cdot 1 + 1$

$\cancel{3^{3}} = (1+2)^{3} = \cancel{2^{3}} + 3\cdot 2^{2} + 3\cdot 2 + 1$

$\vdots$

$\cancel{(k+1)^{3}} = (1+k)^{3} = \cancel{k^{3}} + 3\cdot k^{2} + 3\cdot k + 1$

$\vdots$

$+)\ \cancel{(n+1)^{3}} = (1+n)^{3} = \cancel{n^{3}} + 3\cdot n^{2} + 3\cdot n + 1$

$(n+1)^{3} = 1^{3} + 3(1^{2}+2^{2}+\cdots+n^{2}) + 3(1+2+\cdots+n) + n$

$= (n+1) + 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^{2}\right) + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$\Rightarrow (n+1)^{3} - (n+1) - \frac{3}{2}(n)(n+1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^{2}$

故可知 $\sum_{k=1}^{n} k^{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

由此法可知,欲求 $\sum_{k=1}^{n} k^{3}$ p 之公式,
我们必須知道 $(1+x)^{4}$ p+1 之公式.

數學歸納法之例子

例 3. 二項式定理

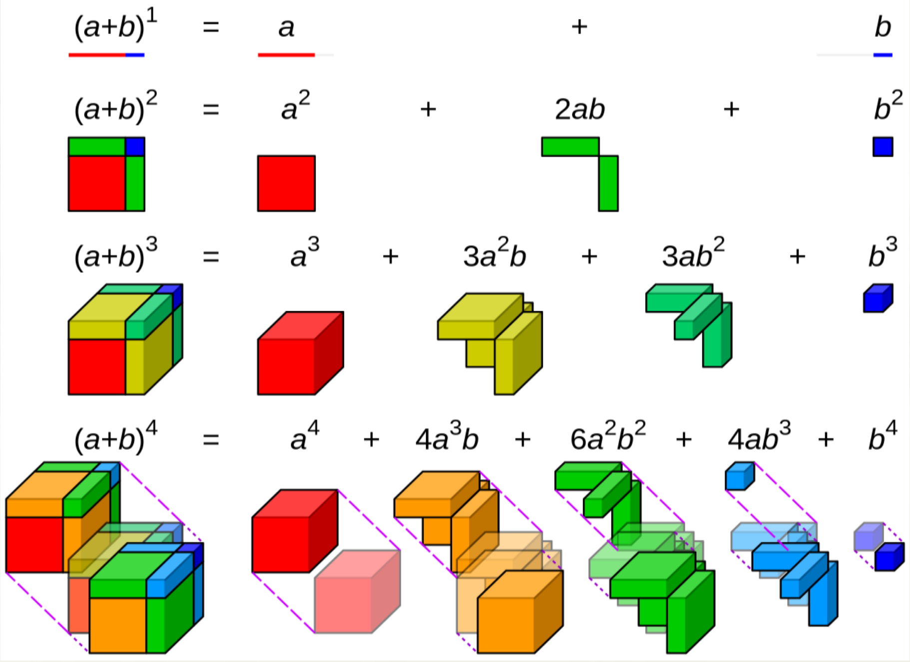
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

方法:

(1) 數學歸納法

(2) 組合方法

(3) 視覺化 $(n = 1, 2, 3, 4)$



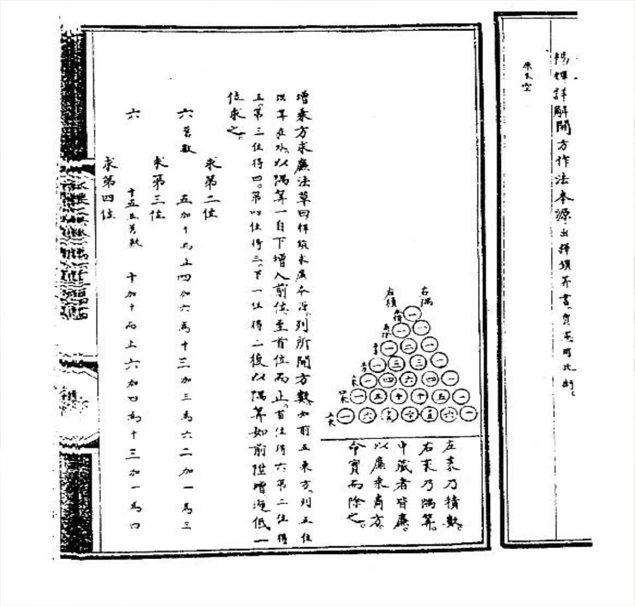
數學歸納法之例子

例 3. 二項式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

中的 $\binom{n}{k}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1



數學歸納法之例子

例 4. 等比級數 (幾何級數)

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

方法：

(1) 數學歸納法

(2) 直接乘開 $(1 + x + \cdots + x^n)(1 - x) = 1 - \mathrm{x}^{\mathrm{n}+1}$

應用：$0.\overline{9} = 0.99999 \cdots 9999 \cdots = 1.$

數學歸納法

利用數學歸納法，我們可以證明

(1) 算術平均數大於等於幾何平均數

(2) 李善蘭恆等式

(3) {1,2, .., 2n} 中任取 $n+1$ 個數出來，其中必存在一數為另一數之倍數，

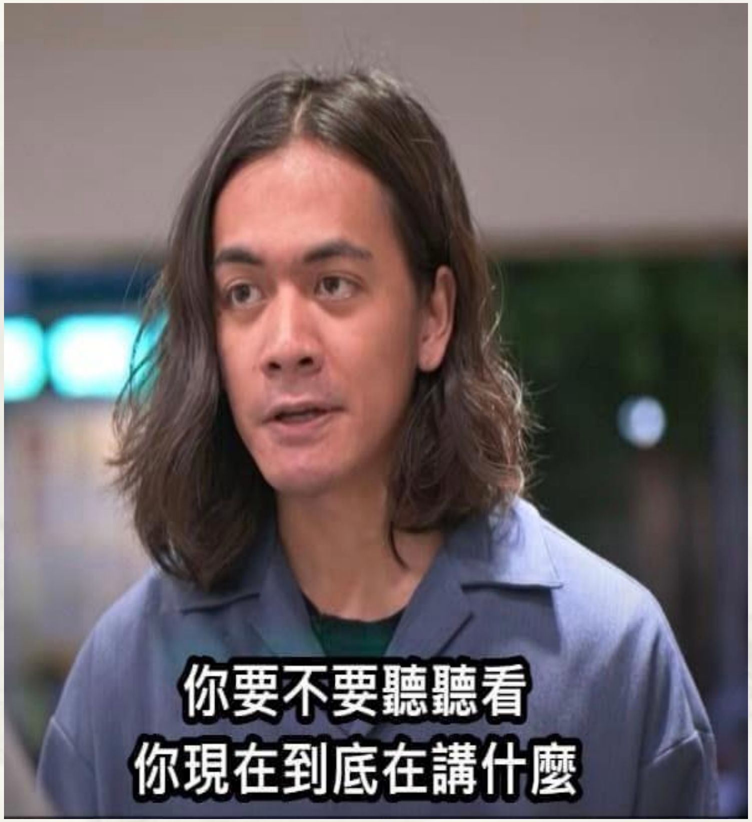
(4) 其他與整數相關的等式，不等式等問題。

參考文獻. 徐道寧，數學歸納法。

數學歸納法

今天早上出門時，我撿到 8 塊錢，抬頭一看，正對著門牌 18 號。走著走著，看到有 2 隻貓在追逐。另外，我還跟 n 個學生一起搭上 3 號公車，上公車之前花了 48 塊買了早餐。下車後，加上我正好 4 位乘客下車。

問: n 中的敘述會出現什麼數字？



數學歸納法

我們一定會覺得：**莫名其妙。**以數學來寫

$$8,\ 18,\ 2,\ n,\ 3,\ 48,\ 4$$

從小到大，我們常被要求尋找 n ，即使面對國家級的考試，亦是如此。

釋疑：

數學歸納法告訴了我們：我們不可能藉由有限項來決定數列的情況。所以；千萬不要再試圖去尋 找 __ 內數字了。然而；如果我們是為了尋求一個數列的規律，請先分析之， 最後還是得回到數學歸納法，若數學歸納法成立；我們所找到的規律才有意義 。

著名不等式

王道不等式

對於所有實數 x, 我們恆有 $x^2 \geq 0.$

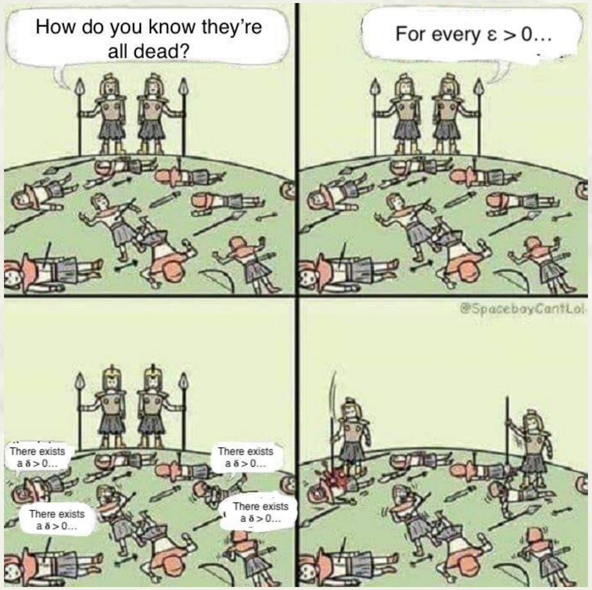
此外，等號成立的充分必要條件為 $x = 0.$

NOTE.

(1) 作分析學 (微積分學)，

如同在玩不等式。

(2) $4 = 2^2$ 與 A^2 之補充。



補充 $4 = 2^2$ 與 A^2

(1) $4 = 2^2$

(2) A^2 之補充 (快速計算 A^2)

Recall $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

$$\therefore \quad x^2 = (x+y)(x-y) + y^2$$

$$A^2 = (A+y)(A-y) + y^2$$

$$14^2 \Rightarrow 180 \left(\begin{array}{c} 18 \\ 1\ 4 \\ 14 \\ 1\ 4 \\ 10 \end{array} \right) 16 \Rightarrow 14^2 = 180 + 16 = 196$$

著名不等式

1. 算幾不等式
2. 柯西－施瓦茨不等式
3. 三角不等式
4. 排序不等式
5. 三角函數不等式
6. 糖水不等式
7. 其他

NOTE. 算幾不等式 $\Longrightarrow$ 柯西－施瓦茨不等式 $\Longrightarrow$ 三角不等式

1. 算幾不等式

算術平均數大於等於幾何平均數（算幾不等式）
(Arithmetic-Geometric Mean Inequality)

命 $x_1, \ldots, x_n$ 為正實數。則

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

等號成立之充分必要條件為 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

證明方法：數學歸納法或其他。

2. 柯西—施瓦茨不等式

柯西—施瓦茨不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality)

命 $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, \mathrm{y_n}$均為實數。則

$$(x_1 y_1 + \cdots + \mathrm{x}_n \mathrm{y_n})^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

等號成立之充要條件為 $x_i = ty_i,\ \ t \in \mathbb{R}$ for each i.

證明方法：算幾不等式或其他。

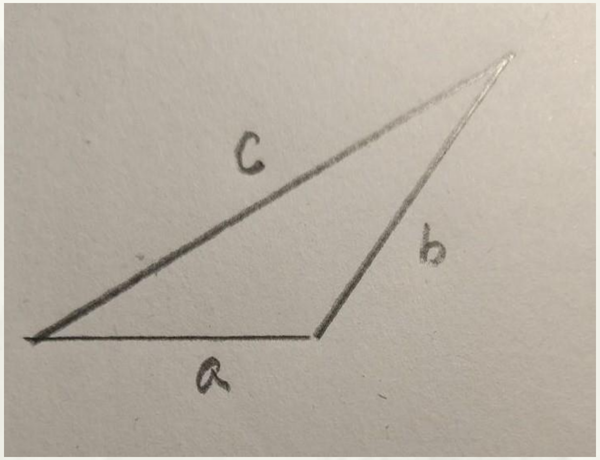
1.23 Prove Lagrange's identity for real numbers:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

Note that this identity implies the Cauchy–Schwarz inequality.

3. 三角不等式

三角不等式 (Triangle Inequality)



$$c < a + b$$

一般來說，我們有

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

且等號成立之充要條件為 $y = 0$ 或 $x = ty$, $t \geq 0$.

NOTE. $|x - a| = x$ 與 a 的距離。

$|$我們 $-$ 2$|$ = 我們 與 2 的距離。

3. 三角不等式

三角不等式 (Triangle Inequality)

給定 2 個 n 維座標向量 $x = (\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ 與 $y = (y_1, \ldots, y_n)$.
我們定義兩向量之間的**距離**為

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

且記為符號 $\| x - y \|$. 則三角不等式如下

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|.$$

等號成立之充要條件為 $y = 0$ 或 $x = ty,\quad t \geq 0.$

3. 三角不等式

簡單的應用

命 $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

則 $1 - \cos x < \sin x$.

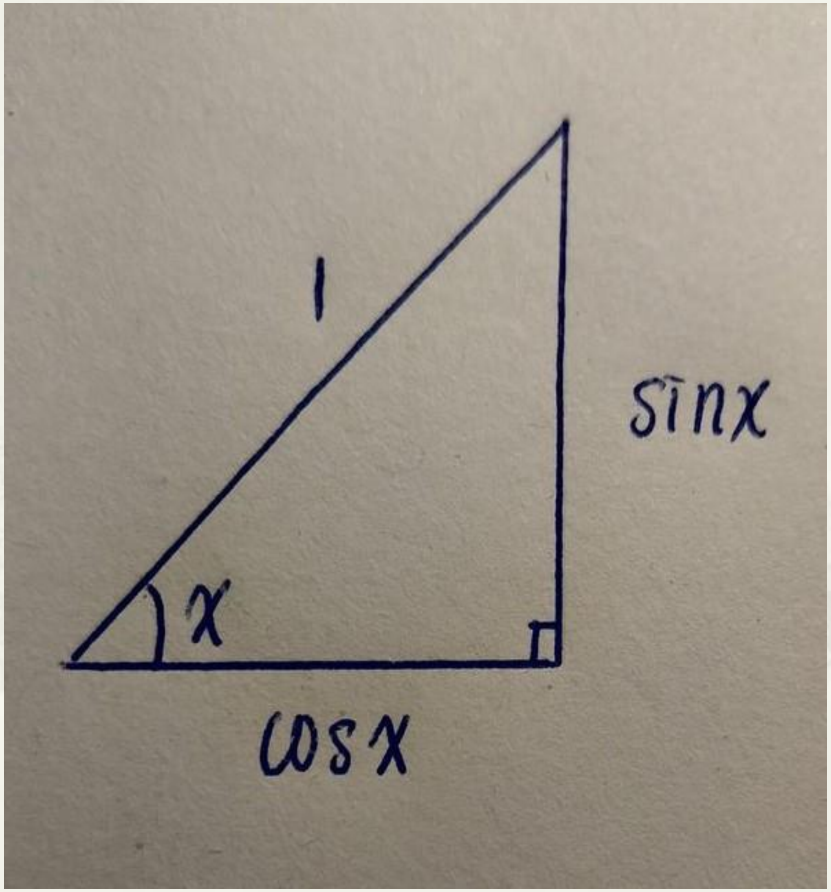
Why?

3. 三角不等式

簡單的應用

命 $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

則 $1 - \cos x < \sin x$.



補充(圓周率 π)

1.半徑為 r 之圓面積 πr^2

2. 圓周率 π 為無理數，即小數點後無窮無盡，且不循環。

山巔

一寺一壺酒，二柳舞扇舞。把酒棄舊山，惡善百世流。

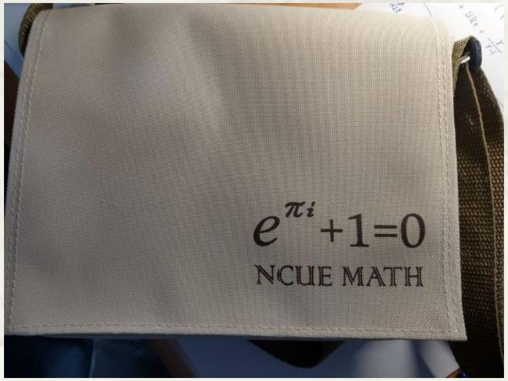
3. 史上最漂亮的公式 (e 與 π 都是無理數，$i=\sqrt{-1}$ 為虛數)

$$e^{\pi i}+1=0.$$

π 對 i 說： Be real！

i 對 π 說： Be rational！

e 對這兩位說：Join me, and we'll be -one.



4. 排序不等式

排序不等式

給定兩數列 $a_1, \ldots, a_n$ 與 $b_1, \ldots, b_n$ 滿足

$a_1 \le \cdots \le a_n$, $b_1 \le \cdots \le b_n$. 此外, $\boldsymbol{c_1, \ldots, c_n}$ **為** $\boldsymbol{b_1, \ldots, b_n}$ **的亂序排列**。記

$$\text{反} = \boldsymbol{a_1 b_n} + \cdots + \boldsymbol{a_n b_1}$$
$$\text{亂} = \boldsymbol{a_1 c_1} + \cdots + \boldsymbol{a_n c_n} \qquad \Longrightarrow \text{反} \le \text{亂} \le \text{正}$$
$$\text{正} = \boldsymbol{a_1 b_1} + \cdots + \boldsymbol{a_n b_n}$$

等號成立之充要條件為 $a_i = a_j$ 或 $b_i = b_j$ $(1 \le i, j, \le n)$.

4. 排序不等式

排序不等式

給定兩數列 $a_1, \ldots, a_n$ 與 $b_1, \ldots, b_n$ 滿足

$a_1 \leq \cdots \leq a_n,\ b_1 \leq \cdots \leq b_n$. 此外, $\boldsymbol{c_1, \ldots, c_n}$ **為** $\boldsymbol{b_1, \ldots, b_n}$ **的亂序排列**。則

$$\text{反} = \boldsymbol{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}$$
$$\text{亂} = \boldsymbol{a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n} \qquad \Longrightarrow \text{反} \leq \text{亂} \leq \text{正}$$
$$\text{正} = \boldsymbol{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}$$

撥

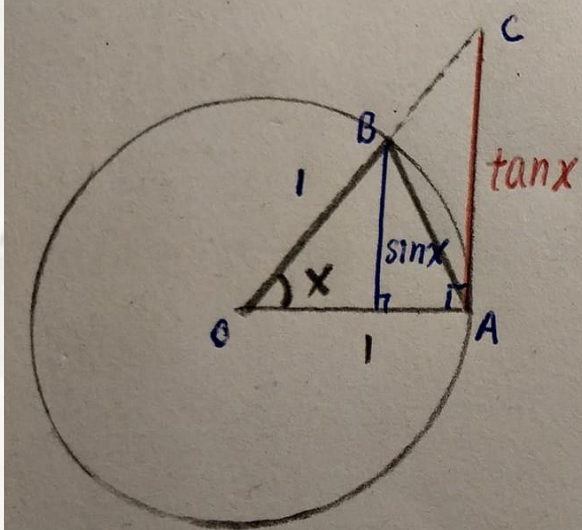
反 亂 正

NOTE. 排序不等式 $\Longrightarrow$ 算幾不等式

5. 三角函數之不等式

命 $0 < x < \pi/2$, 則我們有下列不等式

$$\sin x < x < \tan x\,.$$



$\frac{1}{2}r^2\theta$

$\triangle OAB$面积 $<$ 扇形OAB之面积 $<$ $\triangle OAC$面积

即

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x^2 < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$$

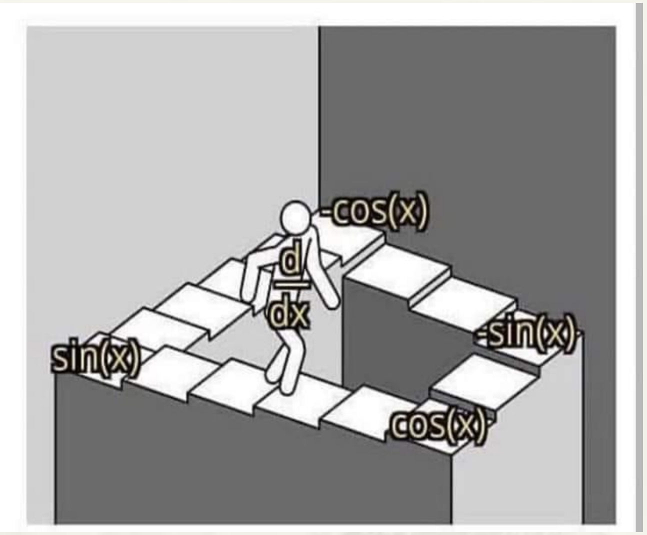
故

$$\sin x < x < \tan x$$

5. 三角函數之不等式

命 $0 < x < \pi/2$, 則我們有下列不等式

$$\sin x < x < \tan x\,.$$



應用. $(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x$ 與其他三角函數之微分公式。

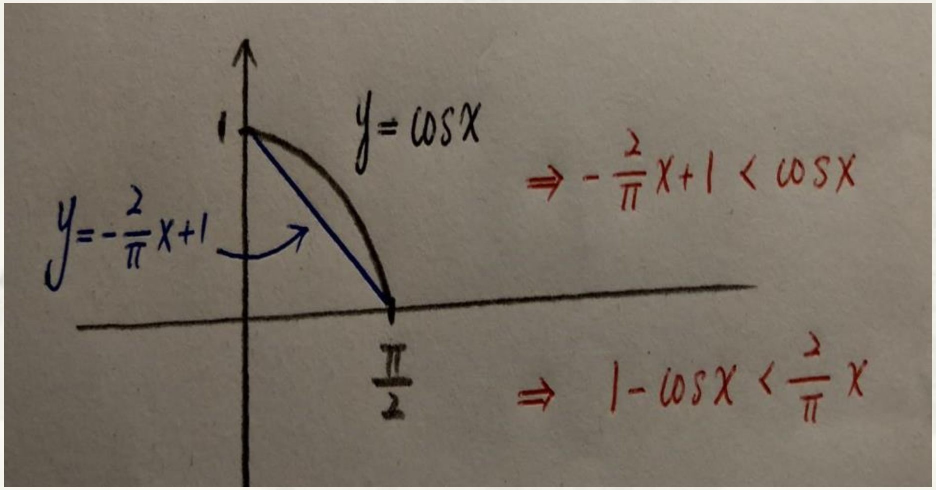
NOTE. 許多微積分的書籍，例如：Courant 的那本微積分書籍，都採用面積的方法來證明。但是這會有循環論證的問題。所以...

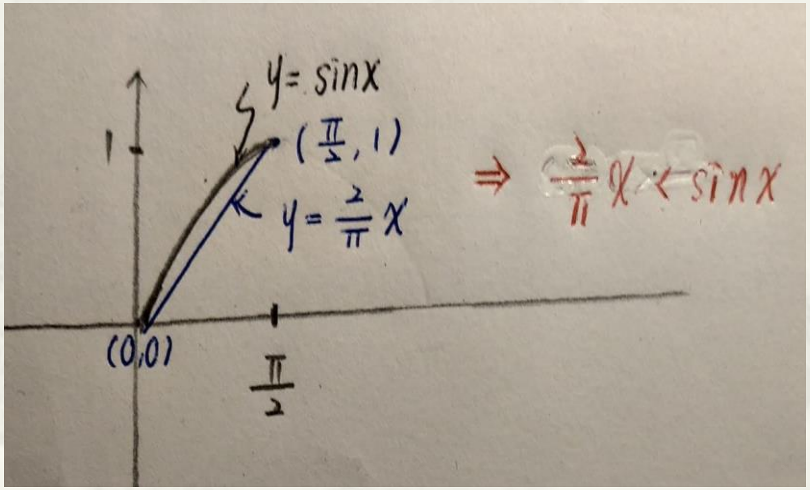
參考文獻. Fred Richman, Circular Argument, The College Mathematics Journal, Vol. 24, No. 2. (Mar., 1993), pp. 160-162.

5. 三角函數之不等式

命 $0 < x < \pi/2$, 則我們有下列不等式 $\sin x < x < \tan x$.
事實上，我們還有

$$1 - \cos x < \frac{2}{\pi}x < \sin x < x < \tan x.$$





應用. 我們可以透過上述不等式來獲得正弦函數與餘弦函數皆在 $(-\infty, \infty)$上連續。（不透過可微性）

6. 糖水不等式

起源

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$$ （錯！錯！錯！）

然而，這三個數字 $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2}$

給了我們甚麼？

6. 糖水不等式

起源

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}\ (錯!錯!錯!)$$

然而，這 2/5 給了我們一個想法:

$$\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$$

一般來說，命 a,c 恆正。則我們恆有下列**糖水不等式**

$$\min\left(\frac{b}{a},\frac{d}{c}\right)\leq\frac{b+d}{a+c}\leq\max\left(\frac{b}{a},\frac{d}{c}\right).$$

等號成立之充要條件為 $b/a = d/c$.

6. 糖水不等式

一般來說，命 a, c 恆正。則我們恆有下列**糖水不等式**

$$\min\left(\frac{b}{a}, \frac{d}{c}\right) \le \frac{b+d}{a+c} \le \max\left(\frac{b}{a}, \frac{d}{c}\right).$$

等號成立之充要條件為 $b/a = d/c$.

證明

命 $m = \min\left(\frac{b}{a}, \frac{d}{c}\right)$. 則 $m \le \frac{b}{a}$ 與 $m \le \frac{d}{c}$. 故 $am \le b$ 與 $cm \le d$.

此導致 $(a+c)m \le b+d$. 因此，$m \le \frac{b+d}{a+c}$.

類似地，

命 $\mathrm{M} = \max\left(\frac{b}{a}, \frac{d}{c}\right)$. 則 $\frac{b}{a} \le M$ 與 $\frac{d}{c} \le M$. 故 $\mathrm{b} \le aM$ 與 $d \le cM$.

此導致 $b+d \le (a+c)M$. 因此，$\frac{b+d}{a+c} \le M$.

6. 糖水不等式

一般來說，命 a, c 恆正。則我們恆有下列**糖水不等式**

$$\min\left(\frac{b}{a},\frac{d}{c}\right) \le \frac{b+d}{a+c} \le \max\left(\frac{b}{a},\frac{d}{c}\right).$$

等號成立之充要條件為 $b/a = d/c$.

解釋.

給予 x 公斤的糖，製造出 y 公斤的糖水。顯然地，$x < y$. 則濃度為 $x/y\,(< 1 = 100\%)$. 若再加入 z 公斤的糖，我們必有

$$\frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+z}\ \text{（更甜了）} < \frac{z}{z} = 1$$

6. 糖水不等式

一般來說，命 a, c 恆正。則我們恆有下列**糖水不等式**

$$\min\left(\frac{b}{a}, \frac{d}{c}\right) \leq \frac{b+d}{a+c} \leq \max\left(\frac{b}{a}, \frac{d}{c}\right).$$

等號成立之充要條件為 $b/a = d/c$.

例子. 命 $a,\ b$ 為兩實數. 則我們有不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

HINT. 命 $\boldsymbol{c = |a| + |b| - |a+b| \geq 0}$.

7. 楊氏不等式

楊氏不等式

命 p, q 為正實數且滿足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. (**量綱分析會解釋**)

則

$$uv \leq \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$$

等號成立之充分必要條件 $u^p = v^q$.

應用 **楊氏不等式 $\Longrightarrow$ Hölder 不等式 $\Longrightarrow$ 柯西不等式**

7. 楊氏不等式

楊氏不等式

命 p,q 為正實數且滿足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 則

$$uv \leq \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$$

等號成立之充分必要條件 $u^p = v^q$.

Consider $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{v^q}{q} - xv$

and $f'(x) = x^{p-1} - v = 0 \Leftrightarrow x = v^{\frac{1}{p-1}}$

f' − ↘ ↗ +

$v^{\frac{1}{p-1}}$

So; $f(x) \geq f(v^{\frac{1}{p-1}}) = 0$ (等號成立於 $x = v^{\frac{1}{p-1}} \Leftrightarrow x^p = v^q$)

This proves $\frac{x^p}{p} + \frac{v^q}{q} - xv \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq xv$.

8. Hölder 不等式

Hölder 不等式

命 p,q 為正實數且滿足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

則

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}$$

等號成立之充分必要條件 $|x_k|^p = c|y_k|^q\ (1 \le k \le n),\ c \ge 0.$

量綱(因次)分析

量綱(因次)分析 (Dimensional Analysis)

方程式(不等式)本身就在說話，而我們要學會怎麼去聆聽。

量綱 ＝ 賦予數字一個單位（物理量）

物理量（單位，例如：長度、時間質量）

故事

英國流體力學大人物 G. I. Taylor 研究原子彈爆炸。從量綱分析的角度出發，他將 Euler 方程轉化為常微分方程，進一步地得到自我相似解。而他的研究結果比美國國防部的機密資料還要精確，這讓美國國防部官員進行調查是否有人洩密。

量綱(因次)分析

一個物理系統的三個基本量(單位)：

L（長度）、M（質量）、T（時間）

透過基本量做出的結果，就是導出量。例如：

速度 $v=\dfrac{dx}{dt}\Longrightarrow[v]=\left[\dfrac{dx}{dt}\right]=\dfrac{L}{T}.$

加速度 $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}\Longrightarrow[a]=\left[\dfrac{d^2x}{dt^2}\right]=\dfrac{L}{T^2}.$

NOTE. 採用 **Maxwell** 建議的符號[·]來表示量綱（單位）。

量綱(因次)分析

楊氏不等式

命 p,q 為正實數且滿足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 則

$$uv \le \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$$

引入單位: $[u]$ 與 $[v]$. **(一旦賦予量綱，就能給予生命)**

故

$$[u][v]=[u]^p=[v]^q$$

將第一個等號 $[v]=[u]^{p-1}$ 帶入第二個等號 $[u]^p=[v]^q$, 我們可得

$$[u]^p=([u]^{p-1})^q$$

此證明 $p=(p-1)q=pq-q$, 即 $pq=p+q \Leftrightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

量綱(因次)分析

無量綱 (Dimensionless)

(1) 角度不具有量綱

$$\boldsymbol{\theta}(\text{角度}) = \frac{\boldsymbol{s}(\text{弧長})}{\boldsymbol{r}(\text{半徑})} \Longrightarrow [\boldsymbol{\theta}] = \frac{[\boldsymbol{L}]}{[\boldsymbol{L}]} = \mathbf{1}$$

(2) 三角函數不具有量綱

$$\boldsymbol{sin\,\theta} = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} \Longrightarrow [\boldsymbol{sin\,\theta}] = \frac{[\boldsymbol{L}]}{[\boldsymbol{L}]} = \mathbf{1}$$

(3) 超越函數不具有量綱 (利用泰勒展開式來看)

$$[\boldsymbol{e^x}] = \mathbf{1}, \qquad [\boldsymbol{ln\,x}] = \mathbf{1}$$

量綱(因次)分析

量綱平衡 (Dimensional Balance)

一個具有物理意義的方程式，其等式兩端每一項的量綱必須一致。凡是正確反映客觀規律的物理方程式，其各項的量綱(dimension) 都必須是一致。只有方程式兩邊每一項的量綱都相同，方程式才可能成立。

例如：牛頓力學

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Longrightarrow [s] = [v_0 t] = \frac{L}{T} T = [a t^2] = \frac{L}{T^2} T^2 = L$$

$$v = v_0 + a t \Longrightarrow [v] = [v_0] = [a t] = \frac{L}{T^2} T = \frac{L}{T}$$

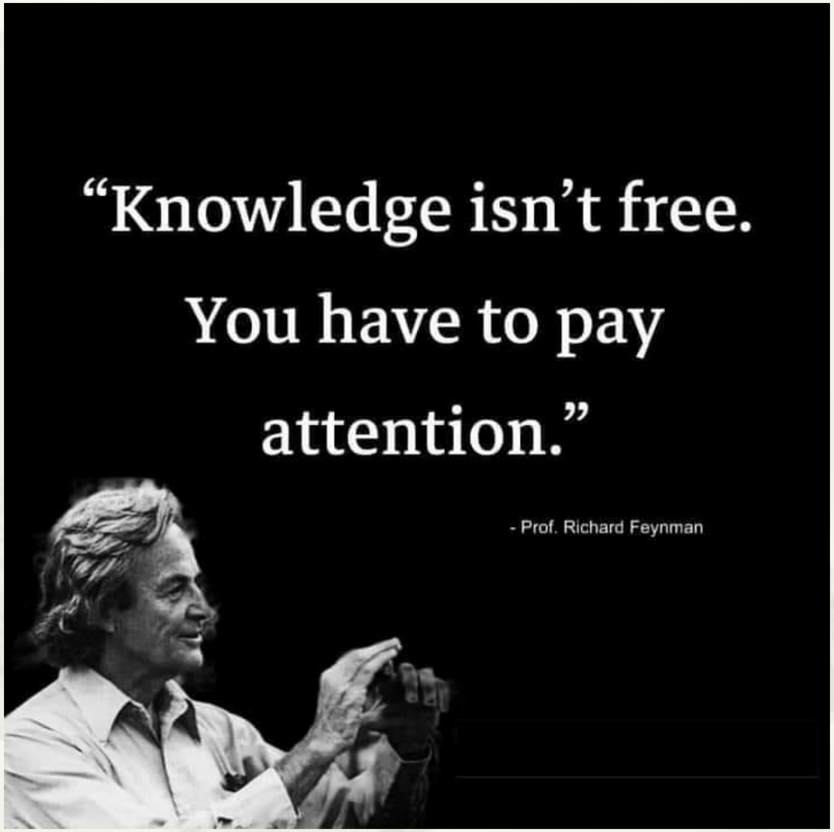
量綱(因次)分析

Hero (Heron) 公式 (三角形面積)

若三角形三邊長度分別是 a, b, c,
則該三角形面積為

$$\boldsymbol{\sqrt[2]{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

其中 $s = (a+b+c)/2$.



量綱(因次)分析

Hero (Heron) 公式. 若三角形三邊長度分別是 a, b, c, 則

$$\Delta\ 面積 = \sqrt[2]{\boldsymbol{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

其中 $s = (a+b+c)/2$.

NOTE. 當 $a + b > c$ 時，這形成三角形；而當 $a + b = c$ 時，三角形會退化成一條線，此時的面積為 0. 故

$$a+b-c \mid \Delta\ 面積.$$

類似地, 我們亦有

$$a+c-b \mid \Delta\ 面積，\quad b+c-a \mid \Delta\ 面積.$$

另外, a, b, c 不因位置而改變其面積，故亦有 $a+b+c$ 的因式，即

$$a+b+c \mid \Delta\ 面積.$$

量綱(因次)分析

Hero (Heron) 公式. 若三角形三邊長度分別是 a, b, c, 則

$$\Delta\text{ 面積} = \sqrt[2]{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

其中 $s = (a+b+c)/2.$

故猜測 $\Delta\text{ 面積} = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$

利用量綱分析，

$$[\Delta\text{ 面積}] = L^2 \neq L^4 = [(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]$$

故可再猜測 (k 為待求常數)

$$\Delta\text{ 面積} = k\sqrt[2]{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

考慮直角三角形 (3,4,5), 可知 $k = 1/4.$ 故我們得到海龍公式。

量綱(因次)分析

對量綱分析有興趣的同學，可以自行 google:

林琦焜，從量綱看世界，數學傳播。

數學傳播　卷期, pp.

從量綱看世界

林琦焜

數學悖論

Banach-Tarski paradox

給你一顆棒球，切 6 刀後，我們可以拼出兩顆棒球。

比較誇大的說法是:

給你一顆棒球，經過有限次切割後，可以拼湊出一整顆地球。

奇怪的數學問題(障眼法)

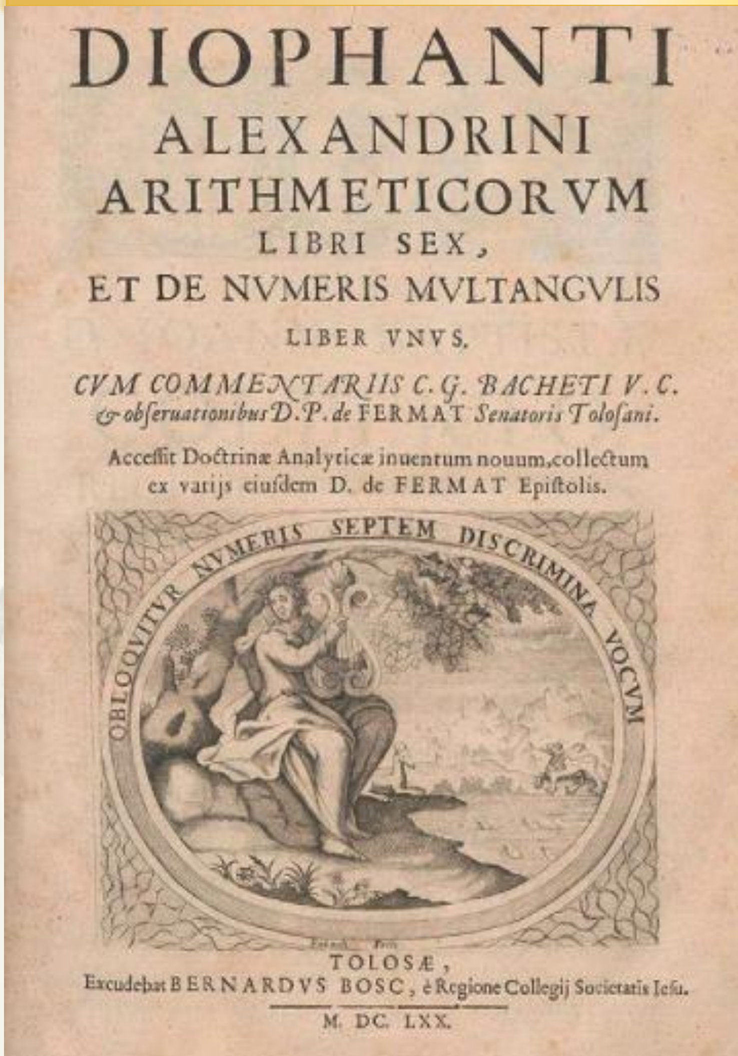
64 = 65?

https://www.youtube.com/watch?v=QTxQDjGQh-0

吃不完的巧克力

https://www.youtube.com/shorts/P5FRoazqXPQ

已解的數學問題(費馬最後定理)


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

將一個立方數分成兩個立方數之和,
或一個四次冪分成兩個四次冪之和,
或者一般地將一個高於二次的冪
分成兩個同次冪之和,
這是不可能的。

關於此, 我確信發現了一種美妙的證法,
可以證明它,
但是余白太少了,我就不寫了

已解的數學問題(費馬最後定理)

費馬最後定理(Fermat Last Theorem, FLT)

給予一個大於 2 的整數 n, 下列方程無正整數解

$$\boldsymbol{x^n + y^n = z^n}$$

這是一個非常出名的一個定理！因為該定理困惑了數學家們長達 300 年以上。然而，費馬卻在其書中寫道：

他找到一個精妙的證明，然而空白之處太小了，所以就沒寫了。

https://vimeo.com/71581136?fbclid=IwAR1k_Ci6ZNlxi727r-ATy4Pbd11DpzoTxFDFoVup_x70yJOe60VQel52l_c

已解的數學問題(費馬最後定理)

英國數學家 Andrew Wiles 證明了 FLT 來自以下過程：

(1) 1985 年時，Frey 說：如果 FLT 有一個解，那麼他可以造出一個橢圓曲線，但是他並沒有證明這個橢圓曲線不是 modular (史稱 epsilon 猜想)。這個 epsilon 猜想隔年 1986 被 Ribet 解決之. 換句話說，如果 FLT 有解，這將得到一個結論：

存在一個橢圓曲線且不是 modular.

(2) Taniyama-Shimura (谷山-志村)猜想(1955)：

每個橢圓曲線都是 modular.

(3) 所以，如果谷山-志村猜想是對的，那麼先前推論的 FLT 有解就錯了！

(4) Andrew Wiles 與其學生 Richard Taylor 證明谷山-志村猜想的特殊情況(1995)，而這特殊狀況足以解決 FLT.

NOTE. 谷山-志村猜想在 1999 年被 Andrew Wiles 等人宣告正式解決！

未解的數學問題

$3n + 1$ problem

給予一個正整數 n. 如果 n 是偶數，考慮 $n/2$. 如果 n 是奇數， 考慮 $3n+ 1$. 重覆上述步驟，猜想：經過有限步驟，最終回到 1.

直到目前，仍然不知道這個結果是否對於所有正整數都成立。舉幾個例子：

$10 \Rightarrow 5 \Rightarrow 16 \Rightarrow 8 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1.$

$9 \Rightarrow 28 \Rightarrow 14 \Rightarrow 7 \Rightarrow 22 \Rightarrow 11 \Rightarrow 34 \Rightarrow 17 \Rightarrow 52 \Rightarrow 26 \Rightarrow 13 \Rightarrow 40 \Rightarrow 20 \Rightarrow 10 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 1.$

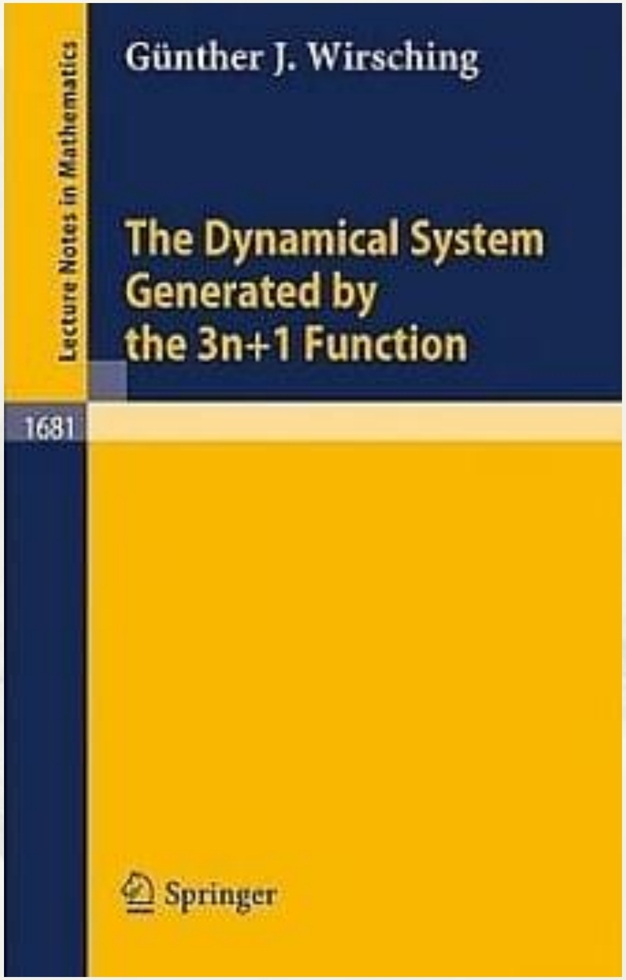
未解的數學問題

$3n + 1$ problem

給予一個正整數 n. 如果 n 是偶數，考慮 $n/2$. 如果 n 是奇數，考慮 $3n+ 1$. 重覆上述步驟，猜想：經過有限步驟，最終回到 1.

NOTE.

Callatz (德) 首先提出，於 1950 年在 Cambridge 召開的數學大會所傳開。1952 年時，由 B. Thwaifes 稱此問題為 3n+1.



未解的數學問題

Goldbach's conjecture (哥德巴哈猜想)

任一大於 2 的偶數皆可表示成兩個質數之和，即

$$2n = p_1 + p_2,$$

此處 p_1 與 p_2 皆為質數。**亦稱 1 + 1 問題！**

NOTE.

(1) 1724 年，Goldbach 寫信給 Euler.

(2) 目前最佳的結果: 1973 年中國數學家陳景潤證明了 **1 + 2,**

$$2n = p_1 + p_2 p_3$$

未解的數學問題

Twin prime conjecture (孿生質數猜想)

$$\text{存在無窮多個質數 } p\text{，使得 } p+2 \text{ 是質數。}$$

NOTE.

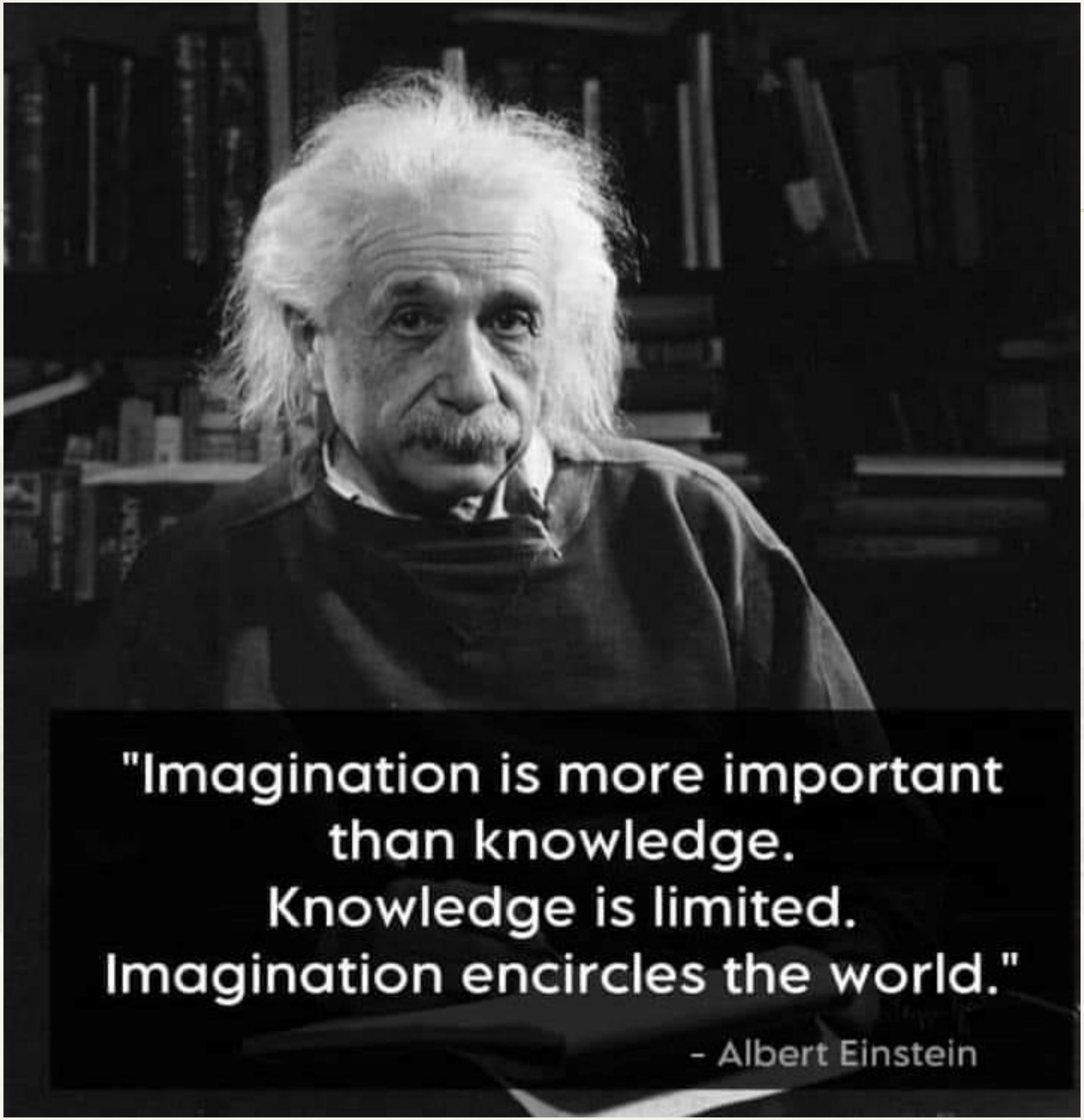
(1) 1900 年，Hilbert 在巴黎的國際數學大會所提的 23 個問題之第八問題。

(2) 2013 年，華人數學家張益唐證明

$$\text{存在無窮多個質數 } p\text{，使得 } p+7\cdot 10^7 \text{ 是質數。}$$

(3) 目前至少已經降到

$$\text{存在無窮多個質數 } p\text{，使得 } p+246 \text{ 是質數。}$$


"Imagination is more important
than knowledge.
Knowledge is limited.
Imagination encircles the world."
- Albert Einstein

謝謝